CÁLCULO, MOVIMENTO OBLÍQUO E GEOGEBRA: uma bela parceria.

Benedito Bráulio Pinheiro Gomes[1]

Delson José Figueirôa Silva [2]

Islayne Aparecida da Silva[3]

Thiago Tabosa De Lima[4]

RESUMO: O Lançamento Oblíquo é um fenômeno que está presente diariamente em nossas vidas, como por exemplo, quando uma pessoa molha a sua horta com uma mangueira, no chute de um jogador de futebol ou em outras situações de lançamentos de projéteis. É uma temática rica do ponto de vista de ensino e da pesquisa, pois aborda situações práticas. O objetivo deste trabalho é proporcionar o estudo do movimento oblíquo em seus aspectos matemáticos utilizando, principalmente, o Cálculo Diferencial e Integral III. Usaremos o Geogebra para modelar e simular, junto com os participantes, o movimento oblíquo, o que pode ajudar a tornar o conteúdo mais dinâmico e compreensível. Uma abordagem desse tipo contribui para fortalecer a interdisciplinaridade e o uso de tecnologias, o que é bastante incentivado pelos órgãos de educação por colaborarem com uma formação mais adequada do educando.
Palavras-chave: Movimento Oblíquo. Matemática. GeoGebra.

1 INTRODUÇÃO

Quando um jogador de golfe rebate a bola, podemos observar que ela realiza um deslocamento parabólico. Esse tipo de movimento é denominado movimento oblíquo. Nele, considerando-se uma velocidade inicial e desprezando-se a ação de forças dissipativas, os corpos estão sujeitos apenas à gravidade e percorrem uma trajetória parabólica.

[1] Universidade Federal de Pernambuco – CAA, bbraulio8@gmail.com
[2] Universidade Federal de Pernambuco – CAA, arutanissa@hotmail.com
[3] Universidade Federal de Pernambuco – CAA, islaynelayne@hotmail.com
[4] Universidade Federal de Pernambuco – CAA, thiagot_lima@hotmail.com

O intuito deste trabalho é apresentar o movimento oblíquo do ponto de vista matemático, mostrando os raciocínios que conduzem às fórmulas. O movimento oblíquo pode ter seu estudo feito a partir de equações se forem usadas as funções vetoriais e as ferramentas do Cálculo aplicadas a elas, tais como limites, derivadas e integrais. Isto dá um tratamento interdisciplinar ao conteúdo, apresentando um método de ensino que valoriza, entre outras coisas, a troca de saberes. Assim é possível uma maior participação do aluno, ocasionando uma aprendizagem mais estruturada e completa.

É sempre importante buscar por alternativas que visem aumentar a motivação da aprendizagem dos alunos bem como facilitar o seu processo de desenvolvimento. No ensino da Matemática um instrumento interativo como o software GeoGebra atua como um mediador na relação sujeito-objeto e torna-se um aliado em um contexto interdisciplinar com práticas metodológicas inovadoras.

2 DESENVOLVIMENTO

O lançamento de projéteis ao longo da história sempre despertou o interesse de grandes matemáticos e filósofos naturais. Nomes que vão de Aristóteles, filósofo grego que fundou as bases do pensamento científico ocidental, à Galileu Galilei e Isaac Newton, grandes colaboradores para o desenvolvimento da Física e da Matemática que conhecemos hoje. Outro formidável filósofo e matemático que se debruçou sobre o tema foi René Descartes, que ainda na juventude integrou o exército do holandês Maurício de Nassau e em batalhas percebeu uma relação entre o ângulo de inclinação em que os canhões eram disparados e a posição dos inimigos.

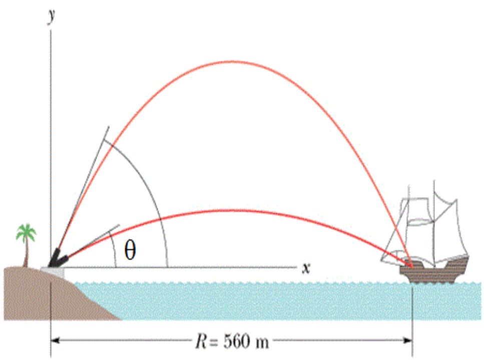

Figura1:“Canhão”,dehttp://www.vdl.ufc.br/solar/aula_link/lfis/semestre01/Física_I/Aula_03/0_arquivos/imagem03.g.if.

A previsão da trajetória de um projétil há séculos atrás parecia algo complicado. Hoje é surpreendentemente simples quando analisadas por meio de ferramentas matemáticas como o Cálculo Diferencial e Funções Vetoriais.

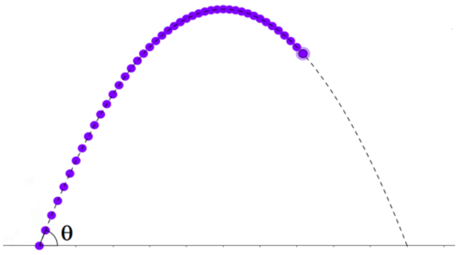

Figura 3: "Parábola", de próprio autor.

Fixando a origem de um sistema de coordenadas cartesianas no ponto inicial da trajetória $\mathbf{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\mathbf{j}$ de um projétil e desconsiderando a resistência do ar (eliminando forças horizontais), a única força que atua sobre ele é vertical. A mesma é conhecida na mecânica newtoniana como força "peso" e é dada por:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}\right) = -mg\,\mathbf{j}, \qquad (1)$$

onde m é a massa do projétil e g é a aceleração da gravidade, cujo módulo é aproximadamente $9{,}8\ m/s^2$. Temos que

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}\right) = -g\,\mathbf{j}. \qquad (2)$$

Como se sabe, a aceleração é a taxa de variação da velocidade em função do tempo. Logo, se integramos a aceleração obtemos $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v} = \int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}\right)dt = \int[0\ \mathbf{i} + (-g)\boldsymbol{j}]\ dt = (0.t + C_1)\mathbf{i} + (-gt + C_2)\ \mathbf{j}$$

$$= (C_1)\mathbf{i} + (-gt + C_2)\ \mathbf{j}.$$

Se calcularmos $\mathbf{v}(0)$ obtemos $\mathbf{v_0} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}$. Sendo assim, C_1 é a componente horizontal da velocidade inicial do projétil, que denotaremos v_{0x}, e C_2 é a componente vertical, que denotaremos por v_{0y}. Portanto, $\mathbf{v}$ pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right) = (v_{0x})\mathbf{i} + \left(-gt + v_{0y}\right)\mathbf{j}. \qquad (3)$$

Com o resultado anterior é possível concluir que a velocidade do projétil em relação ao eixo x é constante e em relação ao eixo y é variável com o tempo de acordo com as seguintes equações:

$$\mathbf{v}_x(t) = v_{0x}, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_y(t) = -gt + v_{0y}. \tag{5}$$

Uma vez que a velocidade é a derivada da posição, a integral de $\mathbf{v}(t)$ fornece:

$$\mathbf{r} = \int \left[\left(v_{0x}\mathbf{i} + \left(-gt + v_{0y} \right) \mathbf{j} \right) \right] dt = (v_{0x}t + C_3)\mathbf{i} + (-\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + C_4)\mathbf{j},$$

$$\therefore \qquad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = (v_{0x}t + C_3)\mathbf{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + C_4 \right) \mathbf{j}.$$

Se calcularmos $\mathbf{r}(0)$ encontramos

$$\mathbf{r}_0 = C_3\mathbf{i} + C_4\mathbf{j} \,,$$

onde C_3 é a componente horizontal da posição inicial, que denominamos x_0, e C_4 é a componente vertical, que chamamos de y_0. Logo, a posição do projétil em função do tempo é:

$$\mathbf{r} = x\,i + y\,j = (v_{0x}t + x_0)\mathbf{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0 \right) \mathbf{j}. \tag{6}$$

Com esta equação conclui-se que o deslocamento do projétil é linear na direção do eixo x e quadrático da direção do eixo y de acordo com as equações:

$$x = v_{0x}t + x_0 \tag{7}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0 \tag{8}$$

Estudando atentamente o vetor $\mathbf{v}_0$ que tem inclinação θ em relação a parte positiva do eixo horizontal

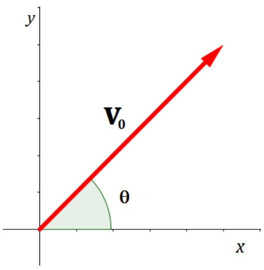

Figura 4: “vetor v.”, de próprio autor.

vemos que as componentes da velocidade têm a forma

$$v_{0x} = \|\mathbf{v}_0\| \cos\theta \qquad \text{e} \qquad v_{0y} = \|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta \tag{9}$$

Substituindo essas igualdades nas equações anteriores encontramos que

$$x = (\|\mathbf{v}_0\| \cos\theta)\, t + x_0 \tag{10}$$

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + (\|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta)t + y_0 \tag{11}$$

Isolando t em (10) ficamos com:

$$t = \frac{x - x_0}{\|\mathbf{v}_0\| \cos\theta},$$

que substituído em (11) fornece

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{\|\mathbf{v}_0\| \cos\theta}\right)^2 + (\|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta)\left(\frac{x - x_0}{\|\mathbf{v}_0\| \cos\theta}\right) + y_0.$$

Tomando x_0 e y_0 iguais a 0, ponto do lançamento, obtemos a equação da trajetória do lançamento y em função de x, mostrando que essa trajetória é parabólica:

$$y = tg(\theta)x - \frac{g}{2\|\mathbf{v}_0\|^2 cos^2\theta}x^2 \tag{12}$$

Para um projétil lançado a partir de um ponto $(x_{0,}y_0)$ e obedecendo (11), sua velocidade vertical $\frac{dy}{dt}$ tende a se reduzir pela ação da força gravitacional, agindo na direção contrária ao movimento no eixo y, até chegar ao ponto mais alto da trajetória com velocidade nula. Em seguida, volta a ganhar velocidade e retorna a posição (x, y_0) com velocidade final igual a inicial, porém com sentido contrário. Com isso percebemos que o projétil atinge a altura máxima no instante que corresponde à metade do tempo (t_m) e nesse instante a velocidade vertical é nula. De acordo com as equações (5) e (9):

$$0 = -gt_m + \|\mathbf{v}_0\| \operatorname{sen}\theta,$$

donde, o instante é:

$$t_m = \frac{\|\mathbf{v}_0\| sen\theta}{g}. \tag{13}$$

Usando este valor para t na equação (11), obtemos a altura máxima que o projétil pode atingir:

$$y_m = \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2 sen^2\theta}{2g}. \quad (14)$$

Como a altura máxima do projétil é atingida no instante t_m, ele deve retornar à altura inicial da trajetória em um instante de tempo $2t_m$. Isso se dá pelo fato do movimento ser parabólico e, assim, simétrico em relação a uma reta paralela ao eixo y que passa pelo vértice. Portanto, se substituímos $2t_m$ na equação (10), com $x_0 = 0$, obtemos o alcance A do projétil:

$$A = \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2}{g} sen(2\theta) \quad (15)$$

Conforme a equação, se fixarmos v_0 e g podemos estabelecer qual deve ser o ângulo que permite o maior alcance. Ele será aquele que faz com que $sen(2\theta)$ seja igual a 1, o que ocorre quando o lançamento forma um ângulo $\theta = 45°$ com a horizontal.

Enfim, como foi mostrado, o estudo acerca do lançamento de projéteis se torna simples quando é feita a utilização das ferramentas matemáticas. Além disso, podemos utilizar softwares como o GeoGebra, com suas diversificadas possibilidades, para a modelagem deste conteúdo. Desta forma, a análise se torna particularmente interessante e dinâmica à medida que compreendemos de que maneira a Matemática faz parte do nosso cotidiano e o amplo alcance que isso tem para o desenvolvimento de novos trabalhos de natureza interdisciplinar.

3 REFERÊNCIAS

- DESCART ES, R. Discurso do Método / Meditações. Tradução por Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Martin Claret, 2008.
- STEWART, J. Cálculo Volume 2 6º ed. Thomson Pioneira, 2005.
- NÓBRIGA, J. Cassio C. Aprendendo Matemática com o GeoGebra. São Paulo: Editora Exato, 2010.
- HEWITT, G. P. Física Conceitual 11º ed. São Paulo: Editora Bookman 2011.
- TIPLER, P. A. MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros-vol 1, 6° ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica-vol 1, 4° ed. São Paulo: Blucher, 2002.